220 - Équations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'études de solutions en dimension 1 et 2.

Cadre : E est un espace vectoriel normé de dimension finie et de norme $\|.\|$, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}\times E^k$ pour $k\in\mathbb{N}^\star$, et $f:\Omega\to E$ une application.

I Étude générale des équations différentielles

1) Définitions. Solutions maximales et globales.

On considère l'équation différentielle d'ordre k :

$$\forall\, t\in\mathbb{R},\ \forall\, y\in E,\ y^{(k)}=f(t,y,y',\dots,y^{(k-1)}) \tag{E}$$

Définition 1. Une solution de (E) est un couple (I,y), où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $y:I\to E$ une fonction k fois dérivable telle que :

$$\forall\, t\in I,\ y^{(k)}(t)=f(t,y(t),y'(t),\dots,y^{(k-1)}(t))$$

Remarque 2. *On peut toujours se ramener à une équation d'ordre 1 en posant $Y=(y,\dots,y^{(k-1)})$. On a alors $Y'(t)=F(t,Y(t))$ où $F(t,y)=(y',\dots,y^{(k-1)},f(t,y,y',\dots,y^{(k-1)}))$. Dans la suite, on ne considérera que des équations d'ordre 1.*

Exemple 3. *Si $f(t,y)=y$, alors $(\mathbb{R},\exp)$ est solution de* (E).

Définition 4. (E) est dite autonome si f ne dépend pas de t.

Définition 5. Étant donné un point $(t_0,y_0)\in\Omega$, le problème de Cauchy consiste à trouver une solution $y:I\to E$ de (E) sur un intervalle I contenant t_0 dans son intérieur et telle que $y(t_0)=y_0$.

Définition 6.
(i) Soient (I_1,y_1) et (I_2,y_2) deux solutions de (E). On dit que (I_1,y_1) prolonge (I_2,y_2) si $I_2\subset I_1$ et $y_1|_{I_2}=y_2$.
(ii) Une solution est maximale si elle n'a aucun prolongement.

Exemple 7. *On considère le problème de Cauchy $y'=y^2$ de données $(0,y_0)$ avec $y_0>0$. Alors $\left(\left]-\infty,\frac{1}{y_0}\right[,t\mapsto\frac{y_0}{1-y_0t}\right)$ est solution maximale.*

Définition 8. Si $\Omega=I\times O$, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ et O un ouvert de E, on appelle solution globale une solution de la forme (I,y).

Remarque 9.
(i) Toute solution globale est maximale.
(ii) Si (E) *est autonome, alors une solution globale est définie sur $\mathbb{R}$.*

2) Résultats d'existence et d'unicité

Lemme 10 (Grönwall). *Soient $f,g:I\to\mathbb{R}$ continues, avec g positive. Soient $t_0,a\in\mathbb{R}$ tels que $f(t)\leqslant a+\int_{t_0}^t f(s)g(s)ds$, alors :*

$$\forall\, t\geqslant t_0,\ f(t)\leqslant a\exp\left(\int_{t_0}^t g(s)ds\right)$$

Théorème 11 (Cauchy-Lipschitz global). *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f:I\times E\to E$ une application continue et globalement lipschitzienne en sa seconde variable, donc telle que pour tout intervalle $K\subset I$ on a :*

$$\exists\, k>0,\ \forall\, t\in K,\ \forall\, y,z\in E,\ \|f(t,y)-f(t,z)\|\leqslant k\,\|y-z\|$$

Alors tout problème de Cauchy admet une unique solution globale.

Théorème 12 (Cauchy-Lipschitz local). *Si f est continue et localement lipschitzienne en sa seconde variable, tout problème de Cauchy admet une unique solution maximale.*

Proposition 13. *Toute fonction $\mathcal{C}^1$ est localement lipschitzienne.*

Théorème 14 (Peano-Arzela). *Si f est continue, pour tout point $(t_0,y_0)\in\Omega$ il existe une solution maximale (I,y) telle que $y(t_0)=y_0$.*

Contre-exemple 15. *Si $f(t,y)=3|y|^{\frac{2}{3}}$, f n'est pas localement lipschitzienne en 0. Le problème de Cauchy de données $(0,0)$ admet au moins deux solutions maximales : 0 et $(t\mapsto t^3)$.*

Proposition 16. *Si* (E) *est autonome, et si (I,y) est solution, alors, pour tout $\tau\in\mathbb{R}$, la translatée $(I+\tau,x\mapsto y(x-\tau))$ est encore solution.*

3) Propriétés des solutions

Proposition 17. *Si f est de classe $\mathcal{C}^p$, les solutions d'une équation différentielle d'ordre k sont de classe $\mathcal{C}^{k+p}$.*

Théorème 18 (Théorème de sortie de tout compact). *Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, soit (I,y) une solution maximale de* (E). *Alors, pour tout compact K de Ω, il existe $T^\star$ (resp. $T_\star$) tel que, pour tout $t\in I$ avec $t>T^\star$ (reps. $t<T_\star$), on a $(t,y(t))\notin K$.*

Exemple 19. *On considère le problème de Cauchy $y'=y^2$ de données $(0,y_0)$ avec $y_0>0$, et on note $\left(\left]-\infty,\frac{1}{y_0}\right[,y_1:t\mapsto\frac{y_0}{1-y_0t}\right)$ une solution maximale. On a $\lim_{t\to y_0^-}y_1(t)=-\infty$ et $\lim_{t\to-\infty}t=-\infty$.*

Théorème 20 (Théorème des bouts)**.** *Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, soit (I, y) une solution maximale de* (E)*. On suppose que $\Omega = J \times E$, avec J un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $\sup I < \sup J$, alors $\lim_{t \to \sup I} \|y(t)\| = +\infty$.*

II Étude des équations autonomes

On se place sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, et on suppose (E) autonome. f est une fonction d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

1) Définitions

Définition 21. Un point y_0 de E est un point d'équilibre si $f(y_0) = 0$.

Remarque 22. *Si y_0 est un point d'équilibre, le problème de Cauchy $y' = f(y)$ de données (t_0, y_0) admet pour solution maximale la fonction constante égale à y_0.*

Définition 23. Soit y_0 un point d'équilibre.

(i) y_0 est dit stable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, si (I, y) est une solution de (E) qui vérifie $|y(t_0) - y_0| < \delta$, alors $[t_0, +\infty[\subset I$ et $|y(t) - y_0| < \varepsilon$ pour tout $t \geqslant t_0$.

(ii) y_0 est dit instable s'il n'est pas stable.

(iii) y_0 est dit asymptotiquement stable s'il existe $\delta > 0$ tel que, si (I, y) est une solution de (E) qui vérifie $|y(t_0) - y_0| < \delta$, alors $[t_0, +\infty[\subset I$ et $\lim_{t \to +\infty} y(t) = y_0$.

Ces définitions sont illustrées par la Figure 1.

Définition 24. Soit $x \in \Omega$. On appelle orbite de x l'image commune des solutions maximales passant par x.

Proposition 25. *Soit $x \in \Omega$. Toutes les solutions qui passent par x sont translatées les unes des autres.*

Proposition 26. *L'ensemble des orbites forme une partition de Ω.*

Définition 27. On appelle portrait de phase cette partition.

Proposition 28. *Soit (I, y) une solution maximale telle qu'il existe $t_1 < t_2$ tels que $y(t_1) = y(t_2)$. Alors $I = \mathbb{R}$ et y est périodique.*

2) Cas linéaire

On considère l'équation différentielle $Y' = AY$, où $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Théorème 29. *Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A. Alors les solutions du système linéaire $Y' = AY$ sont :*

(i) asymptotiquement stables si, et seulement si, $\mathrm{Re}(\lambda_j) < 0$ *pour tout $j \in [\![1, n]\!]$.*

(ii) stables si, et seulement si, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, ou bien $\mathrm{Re}(\lambda_j) < 0$*, ou bien* $\mathrm{Re}(\lambda_j) = 0$ *et le bloc correspondant est diagonalisable.*

Théorème 30. *Dans le cas $n = 2$, on peut classifier les différents types de portraits de phase possibles en fonction de* $\det A$ *et de* $\mathrm{tr}\, A$*. Cette classification est illustrée par la Figure 3.*

III Exemples d'études

1) Utilisation des séries entières

Si l'équation est à coefficients polynômiaux, on peut chercher les solutions développables en séries entières autour de 0. Si cette solution est maximale, elle est unique par le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Exemple 31. *Le problème de Cauchy $y' = y$ de données $(0, 1)$ admet pour solution $t \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{t^n}{n!} = e^t$.*

Exemple 32 (Bessel)**.** *On considère l'équation différentielle de Bessel $xy'' + y' + xy = 0$. Sa solution f_0 valant 1 en 0 se développe en série entière sur $\mathbb{R}$. De plus, si f est une autre solution sur un intervalle $]0, a[$, alors (f, f_0) est libre si, et seulement si, f n'est pas bornée au voisinage de 0.*

2) Système de Lotka-Volterra

Exemple 33. *Soient $a, b, c, d, x_0, y_0 \in \mathbb{R}^{+\star}$. On considère le système :*

$$\begin{cases} x' = x(a - by) \\ y' = y(-c + dx) \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases}$$

Il s'agit d'un système classique modélisant une interaction proie-prédateur. Il admet une unique solution maximale globale, qui est périodique, et admet deux points d'équilibre : un point-selle en $(0, 0)$ et un centre en $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$. Son portrait de phase est illustré par la Figure 2.

3) Équation de Hill-Mathieu

Théorème 34 (Hill-Mathieu)**.** *On considère l'équation $y'' + qy = 0$, où $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, paire et π-périodique. On note W l'espace des solutions, et $A : W \to W$ défini par $Ay(x) = y(x+\pi)$.*

(i) Si $|\operatorname{tr}(A)| < 2$, alors toutes les solutions sont bornées.

(ii) Si $|\operatorname{tr}(A)| = 2$, alors il existe une solution non nulle bornée.

(iii) On a $|\operatorname{tr}(A)| < 2$ si, et seulement si, $y_1'(\pi)y_2(\pi) = 0$.

(iv) Si $|\operatorname{tr}(A)| > 2$, alors aucune solution non triviale n'est bornée.

Application 35. *Les solutions de $y'' + y = 0$ sont toutes bornées, alors que les solutions non triviales de $y'' - y = 0$ sont toutes non bornées.*

Développements

— Équation de Bessel (32) [FGN]
— Équation de Hill-Mathieu (34) [QZ]

Références

[Dem] Jean-Pierre Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles.* EDP Sciences
[QZ] Hervé Queffélec and Claude Zuily. *Analyse pour l'agrégation.* Dunod
[FGN] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X-ENS Analyse 4.* Cassini

Annexes

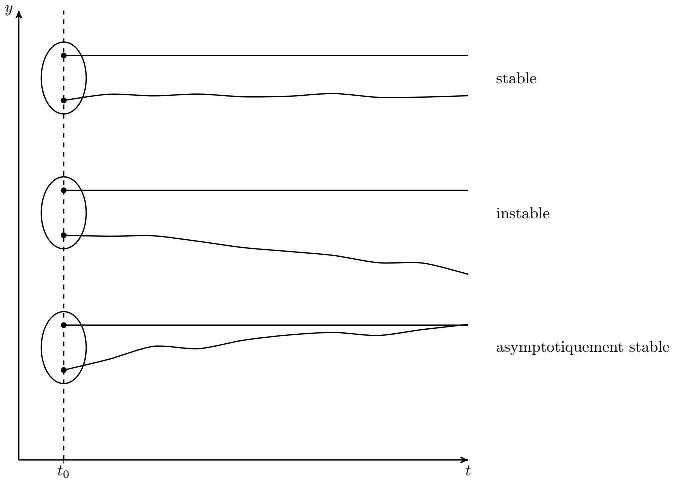

Figure 1 – Stabilité d'un point d'équilibre

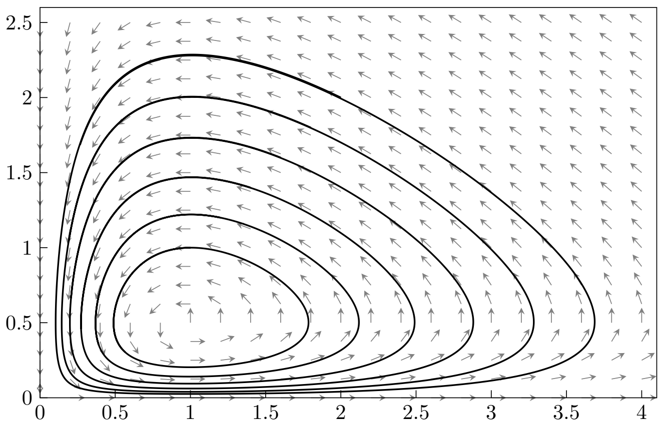

Figure 2 – Lotka Volterra

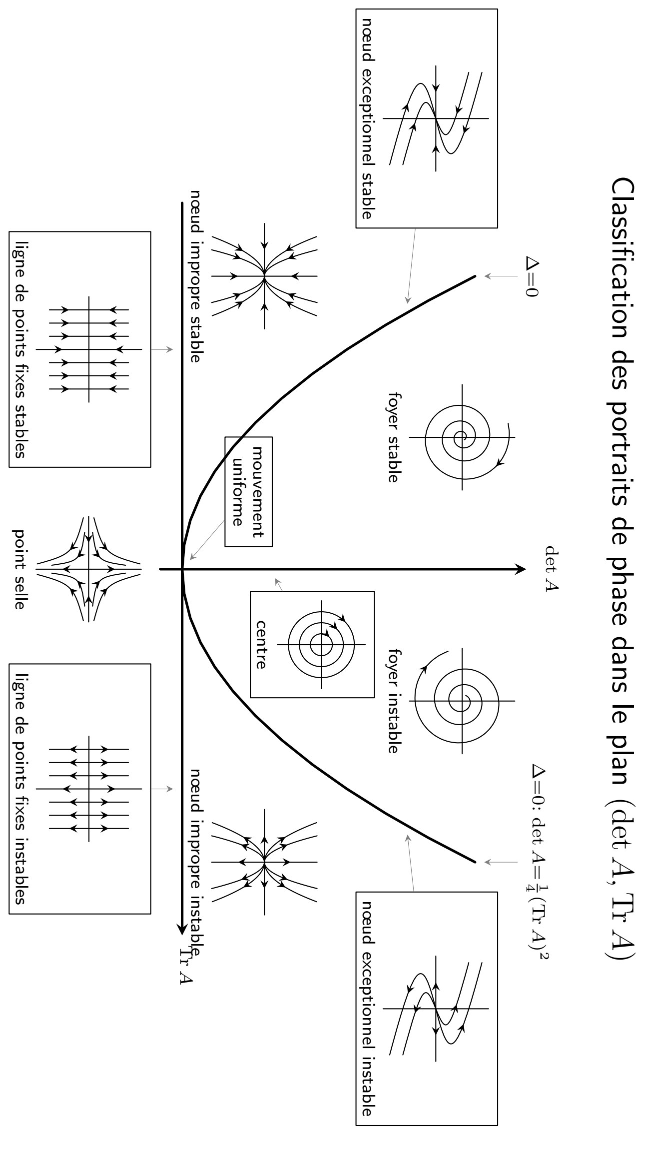

Figure 3 – Portraits de phase